

Messungen und Messfehler; signifikante Stellen

Messfehler

Genaue Messungen sind ein wichtiger Teil der Physik. Doch keine Messung ist absolut genau. Mit jeder Messung ist ein Messfehler verbunden. Messfehler können ihre Ursachen haben

- ... in der Experimentieranordnung und der Umgebung
- ... in den Messgeräten
- ... beim Experimentator

Jedes Messgerät hat aufgrund seines Aufbaus und seiner Herstellung eine begrenzte Genauigkeit und die Anzeigeskala gibt vor, wie genau abgelesen werden kann. Wenn Sie beispielsweise die Breite eines Holzbretts mit einem Massstab mit Millimeteerteilung bestimmen wollen (vgl. Abb.), können Sie das Resultat mit einer Genauigkeit von 1 mm angeben, die kleinste Einteilung des Massstabes (die Hälfte davon wäre auch noch in Ordnung). Der Grund dafür ist die Schwierigkeit des Beobachters, zwischen den kleinsten Teilstrichen zu interpolieren.

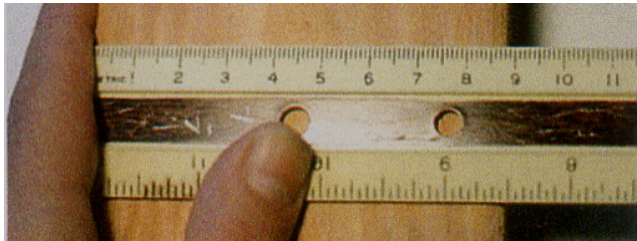


Abb. 1: Messung der Breite eines Holzbretts mit dem Massstab mit Millimeteerteilung.

Die Angabe eines Messergebnisses sollte unbedingt auch die **Genauigkeit** oder den **geschätzten Fehler der Messung** enthalten. Beispielsweise könnte die Breite als

$8.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$

aufgeschrieben werden. Die $\pm 0.1 \text{ cm}$ („plus oder minus 0.1 cm “) stehen für die abgeschätzten Messfehler der Messung, so dass die tatsächliche Breite höchstwahrscheinlich zwischen 8.7 cm und 8.9 cm liegt. Oft wird der Messfehler eines gemessenen Wertes nicht explizit angegeben. In solchen Fällen nimmt man an, dass der Messfehler eine (oder sogar zwei bis drei) Einheiten der letzten angegebenen Dezimalstelle des Messwertes beträgt. Wenn beispielsweise die Länge mit 8.8 cm angegeben wurde, so kann man von einem Messfehler von 0.1 cm ausgehen. In so einem Fall ist es dann wichtig, nicht etwa 8.80 cm zu schreiben. Dies würde einen Messfehler in der Größenordnung von 0.01 cm implizieren; es würde suggerieren, dass die wahre Länge höchstwahrscheinlich zwischen 8.79 cm und 8.81 cm liegt, während Sie eigentlich den tatsächlichen Wert zwischen 8.7 cm und 8.9 cm vermuten.

Jede Messung ist mit Fehlern behaftet. Die Messwerte weichen vom wahren Wert der betreffenden Grösse ab.

Signifikante Stellen

Die Anzahl der sicheren Stellen einer Zahl wird die Anzahl **signifikanter Stellen** genannt. Es gibt vier signifikante Stellen in der Zahl 23.21 cm , zwei in der Zahl 1.4 cm und zwei in der Zahl 0.062 cm (die vorangestellten Nullen sind bloss Platzhalter, die dem Dezimalkomma seinen Platz zuweisen – diese dürfen nicht mitgezählt werden).

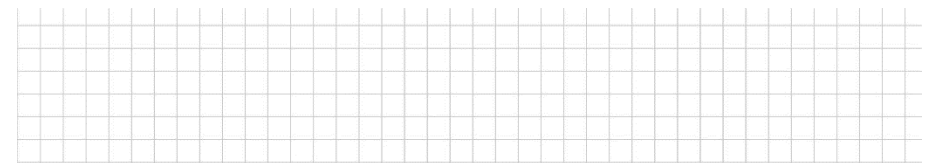
Die Anzahl signifikanter Stellen muss nicht immer klar bestimmt sein. Nehmen Sie beispielsweise die Zahl 80 . Ist es nur eine oder sind es zwei signifikante Stellen? Sagen wir, es liegen ungefähr 80 km zwischen zwei Städten (aber es könnten auch 70 km oder 90 km sein), so gibt es nur eine signifikante Stelle (die 8), da die Null nur ein Platzhalter ist. Sind es jedoch *exakt* 80 km mit einem Messfehler von 1 km oder 2 km , dann hat die 80 zwei signifikante Stellen. Beträgt der Messfehler 0.1 km , so schreiben wir 80.0 km (und die Angabe hätte drei signifikante Stellen). Im Skript zum Unterricht können Sie davon ausgehen, dass bei vorgegebenen Zahlen wie 3000 alle Nullen signifikant sind (d. h. die Zahl 3000 besitzt vier signifikante Stellen) – Sie sollten sich jedoch anderweitig nicht unbedingt darauf verlassen.

Vorangestellte Nullen (auch führende Nullen oder linksseitige Nullen genannt) sind keine signifikanten Ziffern, nachfolgende (rechtsseitige) Nullen in diesem Skript jedoch schon.

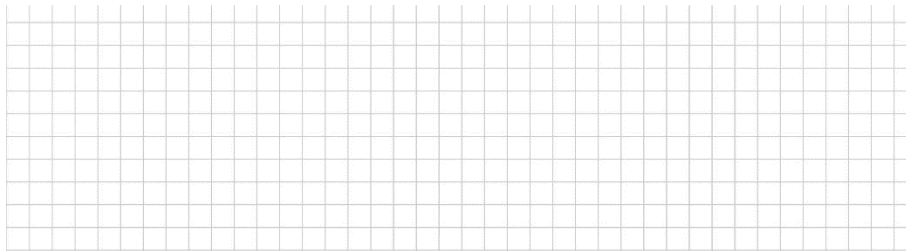
Wir haben gelernt, wie wir Zahlen in Potenzen von Zehn, in der sogenannten **wissenschaftlichen Schreibweise** notieren können. Ein Vorteil der wissenschaftlichen Schreibweise ist, dass sie die Anzahl signifikanter Stellen klar auszudrücken gestattet. Beispielsweise sieht man der Zahl $36'900$ nicht an, ob sie drei, vier oder fünf signifikante Stellen hat (ausser sie steht im Physikskript des Unterrichtes, dann besitzt sie 5 signifikante Stellen). In der Schreibweise mit Zehnerpotenzen lässt sich diese Mehrdeutigkeit vermeiden: Hat die Zahl drei signifikante Stellen, so schreiben wir $3.69 \cdot 10^4$, hat sie hingegen vier, so wird daraus $3.690 \cdot 10^4$.

Beispiele:

1. Wie viele signifikante Ziffern haben folgende Grössen? **a)** 8900 kg/m^3 ; **b)** 0.00150 m ; **c)** $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$; **d)** 3600 s ; **e)** 78.5 kg ; **f)** $1.50 \cdot 10^8 \text{ kg}$.



2. Die Masse von Hans Muster wird auf zwei Arten angegeben: $m = 71.2 \text{ kg}$ bzw. $m = 71'200 \text{ g}$. Welche Unterschiede bestehen hinsichtlich der Genauigkeit dieser Werte?



Addition und Subtraktion neu gelernt...

Wenn wir mit dem Taschenrechner die Zahlen 150.0 und 0.507 addieren, so zeigt dieser als Ergebnis den Wert 150.507 an. In der Physik haben wir es nicht mit „blossen Zahlen“ zu tun, sondern mit Messwerten und jeder Messwert hat eine bestimmte Genauigkeit. Wenn wir zu 150.0 g Wasser genau 0.507 g Kochsalz hinzufügen, so sollten wir daraus nicht schliessen, dass das Wasser samt Kochsalz genau 150.507 g wiegt. Dieses Resultat würde eine falsche Genauigkeit vorgaukeln:

Die Wassermasse von 150.0 g deutet an, dass diese mit einem Fehler der Grössenordnung 0.1 g behaftet ist, besser gesagt mit einer Ungenauigkeit an der ersten Stelle hinter dem Komma. Das Wasser könnte auch 150.1 g oder 149.9 g wiegen und wurde vermutlich mit einer einfachen Küchenwaage gemessen, welche auf Zehntelgramm genau anzeigt. Die Angabe der Salzmasse von 0.507 g hingegen muss mit einer sauber aufgestellten und kalibrierten Präzisionswaage bestimmt worden sein und ist mit einem Fehler der Grössenordnung 0.001 g behaftet, also mit einer Ungenauigkeit an der dritten Stelle hinter dem Komma. Deshalb muss bei der Addition dieser beiden Werte bereits mit einer Ungenauigkeit an der ersten Stelle hinter dem Komma gerechnet werden. Wir können bestenfalls sagen, dass die Masse des Wassers samt Salz 150.5 g beträgt. Genauere Angaben können wir nicht machen. Denn welchen Sinn macht es, wenn wir für die Masse von Salz und Wasser zusammen den Wert 150.507 g angeben, wenn wir uns schon bei der ersten Stelle nach dem Komma nicht sicher sind, ob diese überhaupt korrekt ist. Solche Überlegungen führen zu folgender Faustregel für Additionen und Subtraktionen:

Bei der **Addition oder Subtraktion** bestimmt der **Zahlenwert mit den wenigsten Stellen nach dem Komma** die Stelle, an der das Ergebnis gerundet wird.

Vorgelöste Beispiele:

$$\underbrace{10.7 + 49}_{59.7} = 60 \quad \underbrace{10.7 - 0.49}_{10.21} = 10.2 \quad \underbrace{10.7 + 4.9}_{15.6} = 15.6$$

Multiplikation und Division neu gelernt:

Nicht nur bei der Addition und Subtraktion von Messwerten sollten wir der Versuchung widerstehen, mehr Stellen im Endergebnis anzugeben als gerechtfertigt sind. Beispielsweise errechnet man die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 11.3 cm und 6.8 cm zu 76.84 cm^2 . Doch dieses Ergebnis hat ganz gewiss nicht den Messfehler 0.01 cm^2 . Die Seitenlängen von 11.3 cm und 6.8 cm implizieren, dass diese Strecken auf ca. 0.1 cm genau gemessen wurden. Die Fläche könnte also auch $11.2 \text{ cm} \cdot 6.7 \text{ cm} = 75.04 \text{ cm}^2$ bzw. $11.4 \text{ cm} \cdot 6.9 \text{ cm} = 78.66 \text{ cm}^2$ betragen. Bestenfalls können wir das Ergebnis mit 77 cm^2 angeben, was mit einem Fehler von etwa 1 cm^2 bis 2 cm^2 einhergeht. Die anderen beiden Ziffern der Zahl 76.84 fallen weg, da sie nicht signifikant sind. Solche Überlegungen führen zu folgender **Faustregel** für Multiplikationen und Divisionen:

Das Endergebnis einer **Multiplikation oder Division** sollte nur so viele signifikante Ziffern haben wie die Zahl in der Rechnung mit der geringsten Anzahl an **signifikanten Stellen**.

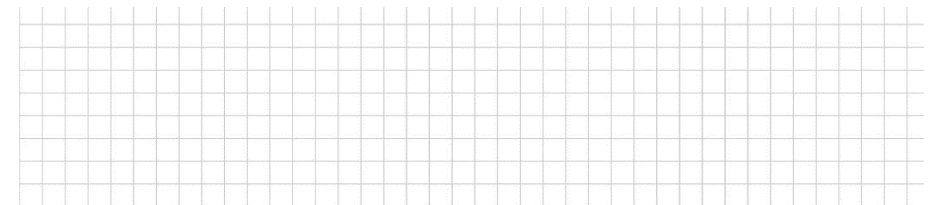
In unserem Beispiel ist das die 6.8 (zwei signifikante Stellen). Somit müssen wir das Ergebnis 76.84 cm^2 auf 77 cm^2 aufrunden.

Beispiele:

3. Wie viele signifikante Ziffern haben die Resultate folgender Berechnungen? Sie brauchen die Ausdrücke nicht zu berechnen. **a)** $1.50 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \cdot 8900 \text{ kg/m}^3$; **b)** $0.090 \text{ s} \cdot 300'000 \text{ km/s}$; **c)** $1 \text{ min} \cdot 800 \text{ km/h}$; **d)** $60 \text{ s} \cdot 800 \text{ km/h}$;



4. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und achten Sie beim Resultat auf eine sinnvolle Genauigkeit: **a)** $25'635.1454 + 4521.1 + 2542.52$; **b)** $173 - 12.9 + 2.43$; **c)** $12.223 \cdot 12.1 \cdot 3.2$; **d)** $17.34 : 25.2$



5. Sie bestimmen die Dichte eines quaderförmigen Körpers. Die gemessenen Grössen sind: Länge $a = 10.1$ mm, Breite $b = 12.3$ mm, Höhe $c = 11.1$ mm; Masse $m = 10$ g. Geben Sie die Dichte in g/cm^3 an (sinnvolle Anzahl signifikanter Stellen).



Kurzlösungen:

- 1) **a)** 4 signifikante Ziffern, **b)** 3 signifikante Ziffern, **c)** 1 signifikante Ziffer, **d)** 4 signifikante Ziffern; **e)** 3 signifikante Ziffern; **f)** 3 signifikante Ziffern.
 2) $m = 71.2$ kg: die Masse wurde auf ca. ± 0.1 kg genau bestimmt; $m = 71 \cdot 200$ g: die Masse wurde auf ca. ± 1 g genau bestimmt. Eine normale Personenwaage zeigt die Masse in der Regel *nicht* auf ± 1 g genau an, es muss sich im zweiten Fall also um eine spezielle Präzisionswaage handeln.
 3) **a)** 3 signifikante Ziffern; **b)** 2 signifikante Ziffern; **c)** 1 signifikante Ziffer; **d)** 2 signifikante Ziffern;
 4) **a)** $32 \cdot 698.8$; **b)** 163; **c)** $4.7 \cdot 10^2$; **d)** 0.688;
 5) 7.3 g/cm^3 .

Die zwei Faustregeln für Addition / Subtraktion bzw. Multiplikation / Division versetzen uns in die Lage, Ergebnisse von Berechnungen ohne grossen Aufwand mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben. So kann in vielen Situationen auf eine aufwändige Fehlerrechnung verzichtet werden.

Behalten Sie bei Benutzung eines Taschenrechners im Hinterkopf, dass nicht alle angegebenen Ziffern signifikant sein können. Wenn Sie 2.0 durch 3.0 teilen, so lautet die korrekte Antwort 0.67 und nicht etwa so etwas wie 0.66666666. Stellen sollten nur dann im Endergebnis ausgeschrieben werden, wenn sie signifikant sind. *Um aber ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, sollten Sie die volle Stellenzahl in der Rechnung berücksichtigen und nur das Endergebnis runden.* Beachten Sie auch, dass Taschenrechner manchmal zu wenige signifikante Stellen angeben. Wenn Sie zum Beispiel $2.5 \cdot 3.2$ mit dem Rechner ausrechnen, so erhalten Sie als Antwort eine einfache 8. Doch das Ergebnis hat zwei signifikante Stellen, somit heisst das korrekte Ergebnis 8.0.

Runden bei gemischten Rechnungen:

Bei Rechnungen, in denen sowohl Multiplikationen / Divisionen als auch Additionen / Subtraktionen vorkommen, machen wir folgende Vereinfachung:

Bei Berechnungen, in denen sowohl Multiplikationen / Divisionen als auch Additionen / Subtraktionen vorkommen, geben wir das Endergebnis nur mit so vielen signifikanten Ziffern an wie die Zahl in der Rechnung mit der geringsten Anzahl signifikanter Ziffern.

Zahlen und Konstanten in Formeln:

In Formeln kommen häufig Zahlwerte bzw. Konstanten vor. So lautet z. B. die Formel für den Kreisumfang U :

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Dabei ist die Zahl „2“ Bestandteil der Formel und wird als exakt betrachtet (es handelt sich hier um *keine* Messgrösse). Die Konstante π (Kreiszahl „Pi“) kann ebenfalls als exakt betrachtet werden: sie lässt sich nämlich mathematisch beliebig genau bestimmen. In der Formel kommt also nur eine einzige Messgrösse vor: Der Radius r . Diese Messgrösse bestimmt, wie genau der Umfang des Kreises angegeben werden darf. Misst man z. B. für den Radius $r = 5.0$ cm, so darf der Kreisumfang mit nur zwei signifikanten Ziffern Genauigkeit angegeben werden:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r = 31 \text{ cm}.$$

Manchmal kommen in Formeln auch Materialkonstanten und / oder Naturkonstanten vor, die nicht beliebig genau bekannt sind (Reibungszahl, spezifische Wärmekapazität, Stefan-Boltzmann-Konstante, Gravitationskonstante, etc.). Dann muss deren begrenzte Genauigkeit berücksichtigt werden, d. h. sie werden dann als Messgrössen betrachtet und bestimmen mit, wie genau eine Berechnung wird (s. später).

Die Zahl Null:

Manchmal kommt die Zahl „0“ alleine vor (ohne weitere Ziffern): Zum Beispiel in der Angabe: „Bei einer Temperatur von 0°C “. Bei dieser Angabe lässt sich nicht sagen, wie viele signifikante Ziffern sie besitzt. In der Regel ist hier gemeint, dass die Temperatur auf $\pm 1^\circ\text{C}$ genau bekannt ist. Heisst es „Bei einer Temperatur von 0.0°C “, so lässt sich auch hier nicht sagen, wie viele signifikante Ziffern die Angabe besitzt. Hier ist in der Regel gemeint, dass die Temperatur auf $\pm 0.1^\circ\text{C}$ genau bekannt ist. Wir werden später sehen, wie man damit umgeht.